

數學建模教學方案設計比賽

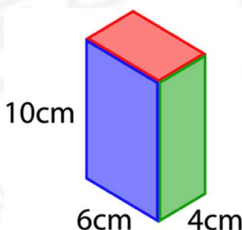
《學教評方案設計》

參賽教學方案名稱：買菜車「大胃王」——紙包飲品最強裝載術

學與教活動內容：

基本資料		
年級：	中一級	時間：70 分鐘
範疇：	度量、圖形與空間；數與代數	節數：兩節
課題：	面積與體積；近似值與數值估算	
課堂模式：	☐ 全班教學 ☒ 分組教學 ☒ 協作教學	
教學目標：	<p>1. 數學知識：(a) 認識及計算直立角柱體(長方體)體積。</p> <p>(b) 在實際的情景下，選擇合適的估算策略(上、下捨入)。</p> <p>2. 建模能力：將現實生活中的「工友購物問題」化為數學模型，舉出 6 種擺法可能性。</p> <p>3. 邏輯思考：在活動開始前，先讓學生以自己的思維邏輯去估計或猜想如何佈局才能最大化紙包飲品的數量。</p> <p>4. 價值觀教育：以辛勞的工友問題引入，灌以「同理心」價值，培養學生關懷別人需要的情操。</p>	
學生難點：	<p>1. 空間想像力不足：難以想出擺放方式共有 6 種。</p> <p>2. 邏輯思考較弱：難以將紙包飲品數量最大化轉為空隙最小化去猜想較有利的佈局方法。</p> <p>3. 文字障礙：部份學生未必完全明白文字指示。</p> <p>4. 跨課題障礙：難以綜合估算策略與體積兩個不同課題的知識。</p>	
已有知識(如有)：	近似值及估算策略：捨入、上捨入、下捨入	
教學資源：	買菜車、紙包飲品、直尺、iPad、工作紙	

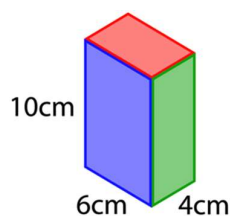
教學計劃		
教學程序及時間	教學活動 / 程序 (請標注與數學建模相關的部分)	所需資源
課前預習	<p>自主學習活動 (混合式學習)：老師於活動前兩天發佈網上預習功課。</p> <ul style="list-style-type: none"> 本地學生須透過賽馬會混合式學習的 BLISS 自學平台，觀看「角柱的體積」影片，學習計算長方體的體積公式，並完成影片當中的題目。 南亞裔學生須透過 Google Classroom 進入老師發佈的 YouTube 連結，觀看“Volume of Cuboid”影片，學習計算長方體的體積公式。 <p>教師需在進行建模活動前檢視班內同學的完成進度再調節教學內容。</p> <p>自學影片連結：</p> <ol style="list-style-type: none"> 中文教學：https://jcblendedlearning.fabulearn.net/watch?file=2171 英文教學：https://youtu.be/qQUAcKEc4 	
重溫	捨入、上捨入、下捨入	
引起動機	<ul style="list-style-type: none"> 情境引入：老師展示一部日常用的買菜車，儲物空間尺寸為 40.5cm (長) × 40.5cm (闊) × 50cm (高) 及 250mL 紙包飲品，請學生分享使用買菜車購物的經驗。 真實痛點分享：老師分享學校過往舉辦 STREAM 活動時，工友需外出採購約 300 包飲品。引述工友的說話：「一架車仔都裝唔晒，好彩有拎多個環保袋咋！」 同理心任務：老師展示當時買菜車內雜亂、充滿縫隙的圖片(或現場模擬擺放)。 	<ol style="list-style-type: none"> 買菜車 紙包飲品

	<ul style="list-style-type: none"> 提出問題：「如果今年由你負責，你能否找出一個『最佳組合』，讓這部車仔在必須合上蓋子的前提下，裝入最多的紙包飲品，減輕工友的負擔？」 	
發展階段	<ul style="list-style-type: none"> 設定限制：為了方便工友記憶，規定每一層的排列方向必須一致，不接受混合式擺法。 <p>【工作紙】第一部分：理想 vs 現實(量度與估算)</p> <ul style="list-style-type: none"> 動手操作(Hands-on)：學生以異質分組形式進行，每組獲發數包紙包飲品及量度工具(直尺)，並量度飲品的長、闊、高。 <ul style="list-style-type: none"> 長：6cm、闊：4cm、高：10cm  <ul style="list-style-type: none"> 計算理論最大裝載量：學生按量度的數據，初步計算買菜車最大可能裝載量。教師和學生討論在計算近似值答案時，為甚麼需要使用下捨入法。 與現實比較：學生分組討論計算結果可否直接用作為現實情境的解，並找出理論和現實的異同，從而帶出作為解難工具，數學建模可透過數據辨別問題的解決方案是否可行，並提供數據基礎在構思解決方案時收窄至僅考慮合理範圍。 <p>【工作紙】第二部分：精準量度與現實誤差(作出假設)</p> <ul style="list-style-type: none"> 教師與學生討論在現實情況量度時，需要因應情況在量度時取較大或較小的近似值，如量度買菜車時應取較小的內膽空間，並可能要減去內膽中突出的部分；而量度紙包飲品時則需取包括突出部分的較大量度，避免得出一些在現實情況不可行的方案。 	<ol style="list-style-type: none"> 紙包飲品 直尺 iPad 工作紙

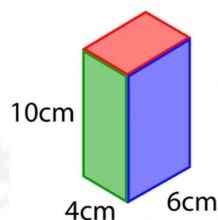
- 學生分組討論因應現實情況的量度方案，及與其相關的假設，如為方便計算，我們只是假設紙包飲品為長方體，而且可以無縫地堆疊。
- 討論估算策略與取值準則：引導學生討論並選擇合適的估算策略，思考為何答案必須向下捨入至最接近的整數。

【工作紙】第三部分：底層擺法(建立模型)

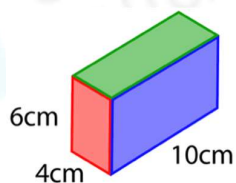
- 建立 6 種模型：老師引導學生思考，一個長方體飲品有 3 組不同尺寸的面，每個面作為底部時都有 2 個旋轉方向，故共有 6 種底層平面的擺法。



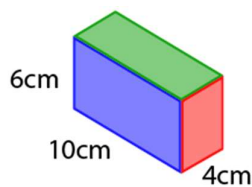
擺法一



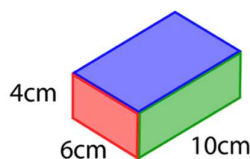
擺法二



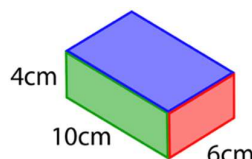
擺法三



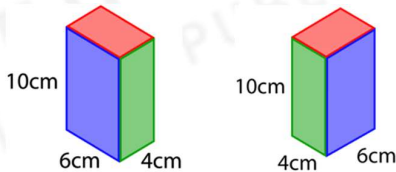
擺法四



擺法五



擺法六

	<ul style="list-style-type: none"> 數位分享：學生將想到的底層飲品擺法畫在工作紙上，老師利用 Nearpod 即時展示 6 種結果。 	
應用階段：	<p>【工作紙】第四部分：方案大比拼</p> <p>計算階段一：層層相同</p> <p>第一步：建立維度對應</p> <ul style="list-style-type: none"> 老師以第一個組合作為例子引導學生思考：紙包飲品有三條邊(假設長 6cm、闊 4cm、高 10cm)，買菜車同樣也有三個維度。 <ul style="list-style-type: none"> 老師：「如果我們想這包飲品直立『站』在車底，哪一條邊會變成『高度』？」 期望學生回應：「是 10cm 那條邊！」 老師：「很好。那剩下的 6cm 和 4cm 就會鋪在車底。這就是其中兩種擺法。」 <div style="text-align: center;">  </div> <p>佈局方法(一)使用的擺法：<u>擺法一</u> 或 <u>擺法二</u></p> <p>第二步：計算「單層」佈局 並運用合適的估算策略 (以下部分取前述的量度為例)</p> <p>學生需要決定底層的排列方式。以擺法 A 為例：</p> <ul style="list-style-type: none"> 計算列式： <ol style="list-style-type: none"> 沿著買菜車的長 (40.5cm)，可放： $40.5\text{cm} \div 6\text{cm} = 6.75 \text{ 包} \rightarrow \text{下捨至整數 } \mathbf{6} \text{ 包}$ <p>→ 老師運用聚焦追問技巧，與學生探討計算得「6.75 包」後，應運用哪一種合適的估算策略？</p>	

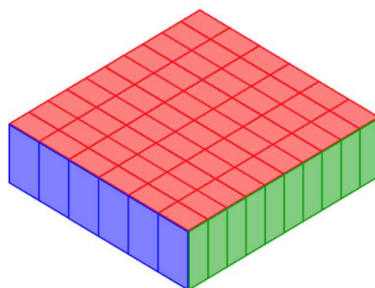
期望學生能回答「下捨入」並指出當中的原因是

- (1) 不容許不符合現實的小數答案；
- (2) 上捨入不符合現實情況 (飲品超出空間限制)。

2. 沿著買菜車的闊 (40.5cm)，可放：

$$40.5\text{cm} \div 4\text{cm} = 10.125 \text{ 包} \rightarrow \text{取至整數 } 10 \text{ 包}$$

- 一層數量： $6 \times 10 = 60$ 包

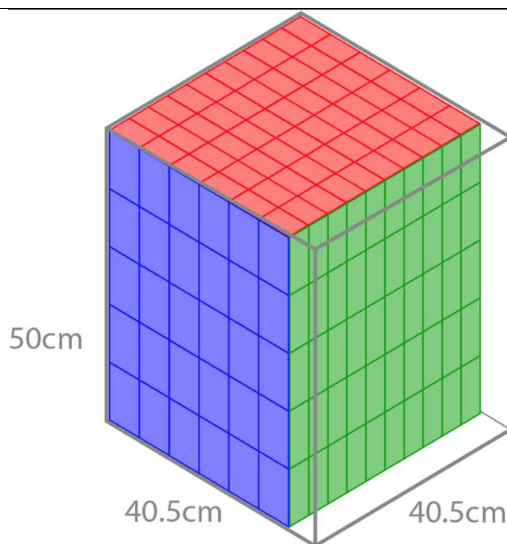


第三步：計算「垂直」疊加

- 老師：「現在我們知道一層有 60 包了，這部高 50cm 的買菜車可以疊多少層？」
- 計算列式：
 - 沿著買菜車的高 (50cm)，可疊層數：

$$50\text{cm} \div 10\text{cm} = 5 \text{ 層} \rightarrow \text{取整數 } 5 \text{ 層}$$

- 最終總數量： $60 \text{ (每層數量)} \times 5 \text{ (層數)} = 300 \text{ 包}$



第四步：計算與比較

學生依照計算擺法 A 的方法，分組計算其餘擺法的數量，並填寫工作紙內的建模表格。

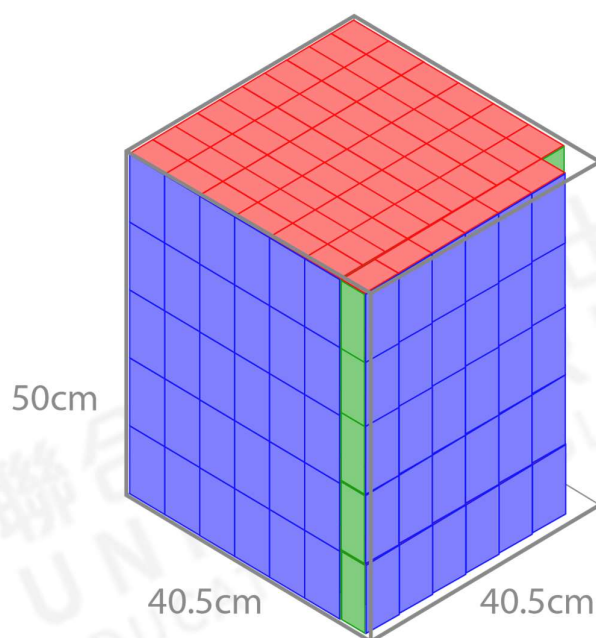
計算階段二：善用空隙

- 學生觀察並回應：「老師，在擺法 A 中，買菜車的長還剩下 $40.5\text{cm} - (6 \times 6)\text{cm} = 4.5\text{cm}$ ，我們可以善用縫隙放入其他擺法的紙包飲品。」
- 計算出三種佈局方法的：
 - (1) 車底長邊的空隙長度
 - (2) 車底闊邊的空隙闊度
 - (3) 車高的空隙高度

- 於是考慮擺法 A，買菜車的長還剩下 4.5cm，因此可用擺法 B 和擺法 C 放入單包飲品，並且分別計算最後飲品總數。

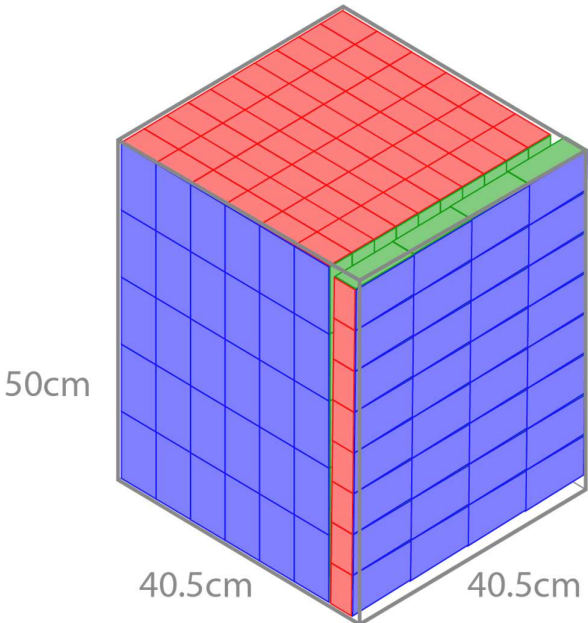
擺法 A + 擺法 B：

$$\text{最後飲品總數} = 300 + 6 \times 5 = 330 \text{ 包}$$



擺法 A + 擺法 C：

$$\text{最後飲品總數} = 300 + 4 \times 8 = 332 \text{ 包}$$

	 <p>50cm</p> <p>40.5cm</p> <p>40.5cm</p> <ul style="list-style-type: none"> • 參考上述計算方法，完成其他擺法和合適的單包飲品擺法，計算最後飲品總數。 • 教師應提醒學生，如他們使用的量度數據不同，結果亦可能不同 	
<p>總結</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 成果展示：各組匯報最終裝載數量，找出「最佳組合」。 • 數學反思：為甚麼該組合能裝最多？ <ul style="list-style-type: none"> ◦ 引導學生發現：該組合最大程度減少了「貼頂」及「邊緣」的剩餘空間，即是將閒置體積減到最少。 • 討論現實上會否仍有其他限制沒有反映在數學模型中，並初步構思可以如何進一步改善模型，如： <ul style="list-style-type: none"> ◦ 以六包為一組包裝的紙包飲品，在量度上比一包飲品更接近長方體，而且在疊堆時縫隙空間也可能更小，所以可以得出更準確的估算，但擺放的彈性亦較小； 	

	<ul style="list-style-type: none"> ○ 買菜車內膽的突出部分可能僅影響最底一層的飲品數量而不影響上層的情況，因此可以分不同情況處理。 ● 情感連結：總結出最強裝載術的方案，並寫成小貼士送給工友，實踐運用數學改善生活的目標。 	
--	--	--


 聯合培進教育出版
 UNITED PRIME
 EDUCATIONAL PUBLISHING